1. Лекция: Математическое моделирование. Форма и принципы представления математических моделей

ЭВМ прочно вошла в нашу жизнь, и практически нет такой области человеческой деятельности, где не применялась бы ЭВМ. ЭВМ сейчас широко используется в процессе создания и исследования новых машин, новых технологических процессов и поиске их оптимальных вариантов; при решении экономических задач, при решении задач планирования и управления производством на различных уровнях. Создание же крупных объектов в ракетотехнике, авиастроении, судостроении, а также проектирование плотин, мостов, и др. вообще невозможно без применения ЭВМ.

Для использования ЭВМ при решении прикладных задач, прежде всего прикладная задача должна быть "переведена" на формальный математический язык, т.е. для реального объекта, процесса или системы должна быть построена его *математическая модель*.

Слово "Модель" происходит от латинского modus (копия, образ, очертание). Моделирование - это замещение некоторого объекта А другим объектом Б. Замещаемый объект А называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий Б - моделью. Другими словами, модель - это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; а модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта.

Моделирование широко используется в различных сферах человеческой деятельности, особенно в сферах проектирования и управления, где особенными являются процессы принятия эффективных решений на основе получаемой информации.

Модель всегда строится с определенной целью, которая оказывает влияние на то, какие свойства объективного явления оказываются существенными, а какие - нет. Модель представляет собой как бы проекцию объективной реальности под определенным углом зрения. Иногда, в зависимости от целей, можно получить ряд проекций объективной реальности, вступающих в противоречие. Это характерно, как правило, для сложных систем, у которых каждая проекция выделяет существенное для определенной цели из множества несущественного.

Теорией моделирования является раздел науки, изучающий способы исследования свойств объектов-оригиналов, на основе замещения их другими объектами-моделями. В основе теории моделирования лежит теория подобия. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и лишь стремится к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта. Абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же.

Все модели можно разделить на два класса:

1. вещественные,
2. идеальные.

В свою очередь вещественные модели можно разделить на:

1. натурные,
2. физические,
3. математические.

Идеальные модели можно разделить на:

1. наглядные,
2. знаковые,
3. математические.

Вещественные натурные модели - это реальные объекты, процессы и системы, над которыми выполняются эксперименты научные, технические и производственные.

Вещественные физические модели - это макеты, муляжи, воспроизводящие физические свойства оригиналов (кинематические, динамические, гидравлические, тепловые, электрические, световые модели).

Вещественные математические - это аналоговые, структурные, геометрические, графические, цифровые и кибернетические модели.

Идеальные наглядные модели - это схемы, карты, чертежи, графики, графы, аналоги, структурные и геометрические модели.

Идеальные знаковые модели - это символы, алфавит, языки программирования, упорядоченная запись, топологическая запись, сетевое представление.

Идеальные *математические модели* - это аналитические, функциональные, имитационные, комбинированные модели.

В приведенной классификации некоторые модели имеют двойное толкование (например - аналоговые). Все модели, кроме натурных, можно объединить в один класс мысленных моделей, т.к. они являются продуктом абстрактного мышления человека.

Остановимся на одном из наиболее универсальных видов моделирования - математическом, ставящим в соответствие моделируемому физическому процессу систему математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания физической модели, часто оказывающейся дорогостоящей и неэффективной.

Математическое моделирование - это средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены *математической моделью*, более удобной для экспериментального исследования с помощью ЭВМ.

Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала. *Математические модели* в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

В общем случае *математическая модель* реального объекта, процесса или системы представляется в виде системы функционалов

$\Phi_i\ (X,Y,Z,t)=0,$

где X - вектор входных переменных, $X=[x_1,x_2,x_3,\ \ldots\ ,\ x_N]^t$,

Y - вектор выходных переменных, $Y=[y_1,y_2,y_3,\ \ldots\ ,\ y_N]^t$,

Z - вектор внешних воздействий, $Z=[z_1,z_2,z_3,\ \ldots\ ,\ z_N]^t$,

t - координата времени.

Построение *математической модели* заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат.

Обычно их оказывается настолько много, что ввести в модель всю их совокупность не удается. При построении *математической модели* перед исследованием возникает задача выявить и исключить из рассмотрения факторы, несущественно влияющие на конечный результат (*математическая модель* обычно включает значительно меньшее число факторов, чем в реальной действительности). На основе данных эксперимента выдвигаются гипотезы о связи между величинами, выражающими конечный результат, и факторами, введенными в*математическую модель*. Такая связь зачастую выражается системами дифференциальных уравнений в частных производных (например, в задачах механики твердого тела, жидкости и газа, теории фильтрации, теплопроводности, теории электростатического и электродинамического полей).

Конечной целью этого этапа является формулирование математической задачи, решение которой с необходимой точностью выражает результаты, интересующие специалиста.

Форма и принципы представления *математической модели* зависит от многих факторов.

По принципам построения *математические модели* разделяют на:

1. аналитические;
2. имитационные.

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей.

Аналитическая модель разделяется на типы в зависимости от математической проблемы:

1. уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные),
2. аппроксимационные задачи (интерполяция, экстраполяция, численное интегрирование и дифференцирование),
3. задачи оптимизации,
4. стохастические проблемы.

Однако по мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему. Тогда исследователь вынужден использовать имитационное моделирование.

В имитационном моделировании функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Имитационное моделирование позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса или системы в определенные моменты времени, однако прогнозирование поведения объектов, процессов или систем здесь затруднительно. Можно сказать, что имитационные модели - это проводимые на ЭВМ вычислительные эксперименты с *математическими моделями*, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

В зависимости от характера исследуемых реальных процессов и систем *математические*

модели могут быть:

1. детерминированные,
2. стохастические.

В детерминированных моделях предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, элементы модели (переменные, математические связи) достаточно точно установленные, поведение системы можно точно определить. При построении детерминированных моделей чаще всего используются алгебраические уравнения, интегральные уравнения, матричная алгебра.

Стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики.

По виду входной информации модели разделяются на:

1. непрерывные,
2. дискретные.

Если информация и параметры являются непрерывными, а математические связи устойчивы, то модель - непрерывная. И наоборот, если информация и параметры - дискретны, а связи неустойчивы, то и *математическая модель* - дискретная.

По поведению моделей во времени они разделяются на:

1. статические,
2. динамические.

Статические модели описывают поведение объекта, процесса или системы в какой-либо момент времени. Динамические модели отражают поведение объекта, процесса или системы во времени.

По степени соответствия между *математической моделью* и реальным объектом, процессом или системой *математические модели* разделяют на:

1. *изоморфные* (одинаковые по форме),
2. *гомоморфные* (разные по форме).

Модель называется изоморфной, если между нею и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие. *Гомоморфной* - если существует соответствие лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

В дальнейшем для краткого определения вида *математической модели* в приведенной классификации будем пользоваться следующими обозначениями:

Первая буква:

Д - детерминированная,

С - стохастическая.

Вторая буква:

Н - непрерывная,

Д - дискретная.

Третья буква:

А - аналитическая,

И - имитационная.

Согласно этим обозначениям, описанная в лекции 2, модель кривошипно-шатунного механизма (Рис. 2.1.) обозначается как модель вида ДНА (детерминированная, непрерывная, аналитическая), так как:

1. Отсутствует (точнее не учитывается) влияние случайных процессов, т.е. модель детерминированная (Д).
2. Информация и параметры - непрерывные, т.е. модель - непрерывная (Н),
3. Функционирование модели кривошипно-шатунного механизма описано в виде нелинейных трансцендентных уравнений, т.е. модель - аналитическая (А)

2. Лекция: Особенности построения математических моделей

Для использования ЭВМ при решении прикладных задач прежде всего прикладная задача должна быть "переведена" на формальный математический язык, т.е. для реального объекта, процесса или системы должна быть построена его математическая модель.

Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

Для *построения математической модели* необходимо:

1. тщательно проанализировать реальный объект или процесс;
2. выделить его наиболее существенные черты и свойства;
3. определить переменные, т.е. параметры, значения которых влияют на основные черты и свойства объекта;
4. описать зависимость основных свойств объекта, процесса или системы от значения переменных с помощью логико-математических соотношений (уравнения, равенства, неравенства, логико-математические конструкций);
5. выделить внутренние связи объекта, процесса или системы с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций;
6. определить внешние связи и описать их с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций.

Математическое моделирование, кроме исследования объекта, процесса или системы и составления их математического описания, также включает:

1. построение алгоритма, моделирующего поведение объекта, процесса или системы;
2. проверка адекватности модели и объекта, процесса или системы на основе вычислительного и натурного эксперимента;
3. корректировка модели;
4. использование модели.

Математическое описание исследуемых процессов и систем зависит от:

1. природы реального процесса или системы и составляется на основе законов физики, химии, механики, термодинамики, гидродинамики, электротехники, теории пластичности, теории упругости и т.д.
2. требуемой достоверности и точности изучения и исследования реальных процессов и систем.

На этапе выбора математической модели устанавливаются: линейность и нелинейность объекта, процесса или системы, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности исследуемого объекта или процесса. При математическом моделировании сознательно отвлекаются от конкретной физической природы объектов, процессов или систем и, в основном, сосредотачиваются на изучении количественных зависимостей между величинами, описывающими эти процессы.

Математическая модель никогда не бывает полностью тождественна рассматриваемому объекту, процессу или системе. Основанная на упрощении, идеализации она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, носят приближенный характер. Их точность определяется степенью адекватности (соответствия) модели и объекта.

Построение математической модели обычно начинается с построения и анализа простейшей, наиболее грубой математической модели рассматриваемого объекта, процесса или системы. В дальнейшем, в случае необходимости, модель уточняется, делается ее соответствие объекту более полным.

Возьмем простой пример. Нужно определить площадь поверхности письменного стола. Обычно для этого измеряют его длину и ширину, а затем перемножают полученные числа. Такая элементарная процедура фактически обозначает следующее: реальный объект (поверхность стола) заменяется абстрактной математической моделью – прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения длины и ширины поверхности стола, и площадь такого прямоугольника приближенно принимается за искомую площадь стола.

Однако модель прямоугольника для письменного стола – это простейшая, наиболее грубая модель. При более серьезном подходе к задаче прежде, чем воспользоваться для определения площади стола моделью прямоугольника, эту модель нужно проверить. Проверки можно осуществить следующим образом: измерить длины противоположных сторон стола, а также длины его диагоналей и сравнить их между собой. Если, с требуемой степенью точности, длины противоположных сторон и длины диагоналей попарно равны между собой, то поверхность стола действительно можно рассматривать как прямоугольник. В противном случае модель прямоугольника придется отвергнуть и заменить моделью четырехугольника общего вида. При более высоком требовании к точности может возникнуть необходимость пойти в уточнении модели еще дальше, например, учесть закругления углов стола.

С помощью этого простого примера было показано, что математическая модель не определяется однозначно исследуемым объектом, процессом или системой. Для одного и того же стола мы можем принять либо модель прямоугольника, либо более сложную модель четырехугольника общего вида, либо четырехугольника с закругленными углами. Выбор той или иной модели определяется требованием точности. С повышением точности модель приходится усложнять, учитывая новые и новые особенности изучаемого объекта, процесса или системы.

Рассмотрим другой пример: исследование движения кривошипно-шатунного механизма (Рис. 2.1).

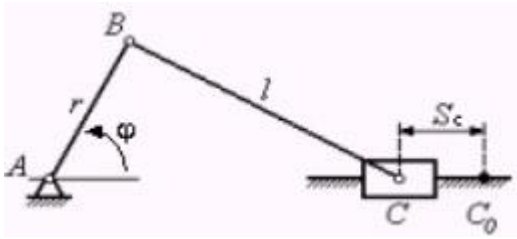


Рис. 2.1.

Для кинематического анализа этого механизма, прежде всего, необходимо построить его кинематическую модель. Для этого:

1. Заменяем механизм его кинематической схемой, где все звенья заменены жесткими связями;
2. Пользуясь этой схемой, мы выводим уравнение движения механизма;
3. Дифференцируя последнее, получаем уравнения скоростей и ускорения, которые представляют собой дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядка.

Запишем эти уравнения:

$$\begin{cases} S_c = \gamma(1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi); \\ V_c = (\frac{d\varphi}{dt})\gamma(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi); \\ A_c = (\frac{d^2\varphi}{dt^2})\gamma(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi); \end{cases}$$

где C_0– крайнее правое положение ползуна С:

r – радиус кривошипа АВ;

l – длина шатуна ВС;

φ – угол поворота кривошипа;

$$\lambda = r/l.$$

Полученные трансцендентные уравнения представляют математическую модель движения плоского аксиального кривошипно-шатунного механизма, основанную на следующих упрощающих предположениях:

1. нас не интересовали конструктивные формы и расположение масс, входящих в механизм тел, и все тела механизма мы заменили отрезками прямых. На самом деле, все звенья механизма имеют массу и довольно сложную форму. Например, шатун – это сложное сборное соединение, форма и размеры которого, конечно, будут влиять на движение механизма;
2. при *построении математической модели* движения рассматриваемого механизма мы также не учитывали упругость входящих в механизм тел, т.е. все звенья рассматривали как абстрактные абсолютно жесткие тела. В действительности же, все входящие в механизм тела – упругие тела. Они при движении механизма будут как-то деформироваться, в них могут даже возникнуть упругие колебания. Это все, конечно, также будет влиять на движение механизма;
3. мы не учитывали погрешность изготовления звеньев, зазоры в кинематических парах А, В, С и т.д.

Таким образом, важно еще раз подчеркнуть, что, чем выше требования к точности результатов решения задачи, тем больше необходимость учитывать при *построении математической модели* особенности изучаемого объекта, процесса или системы. Однако, здесь важно во время остановиться, так как сложная математическая модель может превратиться в трудно разрешимую задачу.

Наиболее просто строится модель, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта, процесса или системы, и имеется большой практический опыт их применения.

Более сложная ситуация возникает тогда, когда наши знания об изучаемом объекте, процессе или системе недостаточны. В этом случае при *построении математической модели*приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер гипотез, такая модель называется гипотетической. Выводы, полученные в результате исследования такой гипотетической модели, носят условный характер. Для проверки выводов необходимо сопоставить результаты исследования модели на ЭВМ с результатами натурного эксперимента. Таким образом, вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта, процесса или системы не является математическим вопросом и не может быть решен математическими методами.

Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова.

Построение математической модели в прикладных задачах – один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель – значит решить проблему более, чем наполовину. Трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. Поэтому очень важно, чтобы при решении прикладных задач математики обладали специальными знаниями об объекте, а их партнеры, специалисты, – определенной математической культурой, опытом исследования в своей области, знанием ЭВМ и программирования.

3 Лекция: Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент. Решение математических моделей

Компьютерное моделирование как новый метод научных исследований основывается на:

1. построении математических моделей для описания изучаемых процессов;
2. использовании новейших вычислительных машин, обладающих высоким быстродействием (миллионы операций в секунду) и способных вести диалог с человеком.

Суть компьютерного моделирования состоит в следующем: на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится серия вычислительных экспериментов, т.е. исследуются свойства объектов или процессов, находятся их оптимальные параметры и режимы работы, уточняется модель. Например, располагая уравнением, описывающим протекание того или иного процесса, можно изменяя его коэффициенты, начальные и граничные условия, исследовать, как при этом будет вести себя объект. Более того, можно спрогнозировать поведение объекта в различных условиях.

Вычислительный эксперимент позволяет заменить дорогостоящий натурный эксперимент расчетами на ЭВМ. Он позволяет в короткие сроки и без значительных материальных затрат осуществить исследование большого числа вариантов проектируемого объекта или процесса для различных режимов его эксплуатации, что значительно сокращает сроки разработки сложных систем и их внедрение в производство.

Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования заставляет совершенствовать математический аппарат, используемый при построении математических моделей, позволяет, используя математические методы, уточнять, усложнять математические модели. Наиболее перспективным для проведения вычислительного эксперимента является его использование для решения крупных научно-технических и социально-экономических проблем современности (проектирование реакторов для атомных электростанций, проектирование плотин и гидроэлектростанций, магнитогидродинамических преобразователей энергии, и в области экономики – составление сбалансированного плана для отрасли, региона, для страны и др.).

В некоторых процессах, где натурный эксперимент опасен для жизни и здоровья людей, вычислительный эксперимент является единственно возможным (термоядерный синтез, освоение космического пространства, проектирование и исследование химических и других производств).

Для проверки адекватности математической модели и реального объекта, процесса или системы результаты исследований на ЭВМ сравниваются с результатами эксперимента на опытном натурном образце. Результаты проверки используются для корректировки математической модели или решается вопрос о применимости построенной математической модели к проектированию либо исследованию заданных объектов, процессов или систем.

В заключение подчеркнем еще раз, что компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент позволяют свести исследование "нематематического" объекта к решению математической задачи. Этим самым открывается возможность использования для его изучения хорошо разработанного математического аппарата в сочетании с мощной вычислительной техникой. На этом основано применение математики и ЭВМ для познания законов реального мира и их использования на практике.

В задачах проектирования или исследования поведения реальных объектов, процессов или систем математические модели, как правило, нелинейны, т.к. они должны отражать реальные физические нелинейные процессы, протекающие в них. При этом параметры (переменные) этих процессов связаны между собой физическими нелинейными законами. Поэтому в задачах проектирования или исследования поведения реальных объектов, процессов или систем чаще всего используются математические модели типа ДНА.

Согласно классификации приведенной в лекции 1:

Д – модель детерминированная, отсутствует (точнее не учитывается) влияние случайных процессов.

Н – модель непрерывная, информация и параметры непрерывны.

А – модель аналитическая, функционирование модели описывается в виде уравнений (линейных, нелинейных, систем уравнений, дифференциальных и интегральных уравнений).

Итак, мы построили математическую модель рассматриваемого объекта, процесса или системы, т.е. представили прикладную задачу как математическую. После этого наступает второй этап решения прикладной задачи – поиск или разработка метода решения сформулированной математической задачи. Метод должен быть удобным для его реализации на ЭВМ, обеспечивать необходимое качество решения.

Все методы решения математических задач можно разделить на 2 группы:

1. точные методы решения задач;
2. численные методы решения задач.

В точных методах решения математических задач ответ удается получить в виде формул.

Например, вычисление корней квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$x_1, 2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

или, например, вычисление производных функций:

$$y = \sin(x), y' = \cos(x);$$
$$y = x^n, y' = nx^{n-1};$$

или вычисление определенного интеграла:

$$\int_b^a \cos(x)dx = \sin(b) - \sin(a);$$

Однако, подставляя числа в формулу в виде конечных десятичных дробей, мы все равно получаем приближенные значения результата.

Для большинства задач, встречающихся на практике, точные методы решения или неизвестны, или дают очень громоздкие формулы. Однако, они не всегда являются

необходимыми. Прикладную задачу можно считать практически решенной, если мы сумеем ее решить с нужной степенью точности.

Для решения таких задач разработаны численные методы, в которых решение сложных математических задач сводится к последовательному выполнению большого числа простых арифметических операций. Непосредственная разработка численных методов относится к вычислительной математике.

Примером численного метода является метод прямоугольников для приближенного интегрирования, не требующий вычисления первообразной для подынтегральной функции. Вместо интеграла вычисляется конечная квадратурная сумма:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\Delta x_i;$$

где

$x_1=a$ – нижний предел интегрирования;

$x_{n+1}=b$ – верхний предел интегрирования;

n – число отрезков, на которые разбит интервал интегрирования (a,b);

Δx_i – длина элементарного отрезка;

$f(x_i)$ – значение подынтегральной функции на концах элементарных отрезков интегрирования.

Чем больше число отрезков n, на которые разбит интервал интегрирования, тем ближе приближенное решение к истинному, т.е. тем точнее результат.

Таким образом, в прикладных задачах и при применении точных методов решения, и при применении численных методов решения результаты вычислений носят приближенный характер. Важно только добиться того, чтобы ошибки укладывались в рамки требуемой точности.

Численные методы решения математических задач известны давно, еще до появления ЭВМ, но ими пользовались редко и только в сравнительно простых случаях в силу чрезвычайной трудоемкости вычислений. Широкое применение численных методов стало возможным благодаря ЭВМ.

4. Лекция: Численные методы решения нелинейных уравнений

Если законы функционирования модели нелинейны, а моделируемые процесс или система обладают одной степенью свободы (т.е. имеют одну независимую переменную), то такая модель, как правило, описывается одним нелинейным уравнением.

Необходимость отыскания корней нелинейных уравнений встречается в расчетах систем автоматического управления и регулирования, собственных колебаний машин и конструкций, в задачах кинематического анализа и синтеза, плоских и пространственных механизмов и других задачах.

Дано нелинейное уравнение:

$f(x) = 0$ (4.1)

Необходимо решить это уравнение, т. е. найти его корень $\overline{x}$.

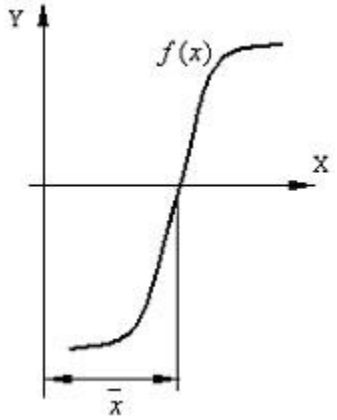


Рис. 4.1.

Если функция имеет вид многочлена степени m,

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

где a_i - коэффициенты многочлена, $i = \overline{1, m}$, то уравнение $f(x)=0$ имеет m корней (рис. 4.2).

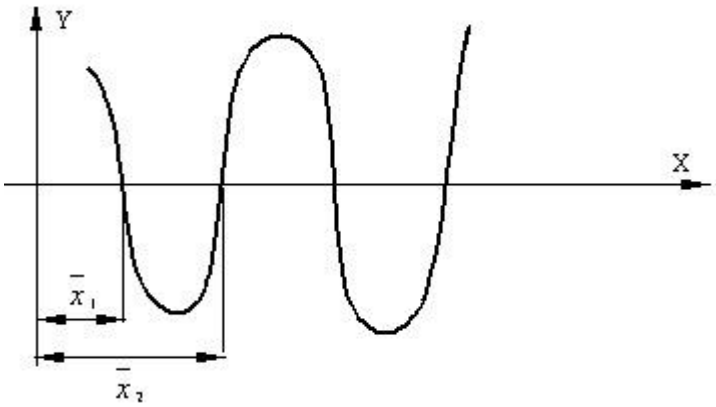


Рис. 4.2.

Если функция `f(x)` включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции от некоторого аргумента `x`, то уравнение (4.1) называется *трансцендентным уравнением.*

Примеры:

$$arctgx + 1 - x = 0,$$
$$x - e^{\frac{-x}{10}} = 0.$$

Такие уравнения обычно имеют бесконечное множество решений.

Как известно, не всякое уравнение может быть решено точно. В первую очередь это относится к большинству *трансцендентных уравнений.*

Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решать произвольные алгебраические уравнения степени, выше четвертой.

Однако точное решение уравнения не всегда является необходимым. Задачу отыскания корней уравнения можно считать практически решенной, если мы сумеем найти корни уравнения с заданной степенью точности . Для этого используются приближенные (численные) методы решения.

Большинство употребляющихся приближенных методов решения уравнений являются, по существу, способами уточнения корней. Для их применения необходимо знание интервала изоляции `[a,b]`, в котором лежит уточняемый корень уравнения (рис. 4.3).

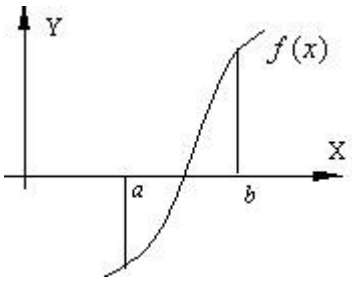


Рис. 4.3.

Процесс определения интервала изоляции `[a,b]`, содержащего только один из корней уравнения, называется отделением этого корня.

Процесс отделения корней проводят исходя из физического смысла прикладной задачи, графически, с помощью таблиц значений функции `f(x)` или при помощи специальной программы отделения корней. Процедура отделения корней основана на известном свойстве непрерывных функций: если функция непрерывна на замкнутом интервале `[a,b]` и на его концах имеет различные знаки, т.е. `f(a)f(b)<0`, то между точками `a` и `b` имеется хотя бы один корень уравнения (1). Если при этом знак функции `f'(x)` на отрезке `[a,b]` не меняется, то корень является единственным на этом отрезке.

Процесс определения корней алгебраических и *трансцендентных уравнений* состоит из 2 этапов:

1. отделение корней, - т.е. определение интервалов изоляции `[a,b]`, внутри которого лежит каждый корень уравнения;
2. уточнение корней, - т.е. сужение интервала `[a,b]` до величины равной заданной степени точности ε .

Для алгебраических и трансцендентных уравнений пригодны одни и те же методы уточнения приближенных значений действительных корней:

1. *метод половинного деления* (метод дихотомии);
2. *метод простых итераций*;
3. *метод Ньютона (метод касательных)*;
4. *модифицированный метод Ньютона* (*метод секущих*);
5. *метод хорд* и др.

Метод половинного деления

Дано нелинейное уравнение:

$f(x) = 0$ (4.1)

Найти корень уравнения, принадлежащий интервалу `[a,b]`, с заданной точностью ε .

Для уточнения корня *методом половинного деления* последовательно осуществляем следующие операции:

1. Делим интервал пополам:

   $$t = \frac{a+b}{2} - \text{координаты середины отрезка}[a,b];$$

2. В качестве нового интервала изоляции принимаем ту половину интервала, на концах которого функция имеет разные знаки (рис.4.4).

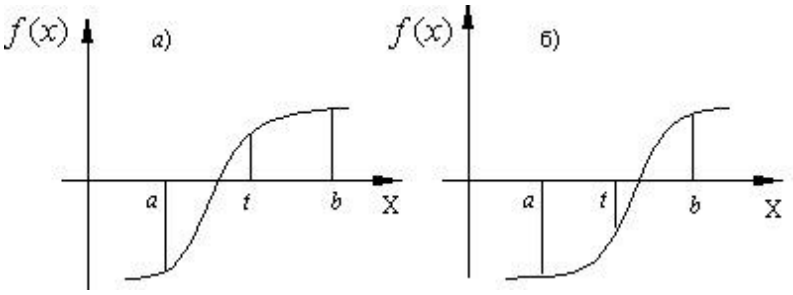


Рис. 4.4.

Для этого:

a) Вычисляем значение функции `f(x)` в точках `a` и `t`.

b) Проверяем: если `f(a)f(t) < 0`, то корень находится в левой половине интервала `[a,b]` (рис.4.4.а). Тогда отбрасываем правую половину интервала и делаем переприсвоение `b=t`.

c) Если `f(a)f(t) < 0` не выполняется, то корень находится в правой половине интервала `[a,b]` (рис.4.4.б). Тогда отбрасываем левую половину и делаем переприсвоение `a=t`. В обоих случаях мы получим новый интервал `[a,b]` в 2 раза меньший предыдущего.

3. Процесс, начиная с пункта 1, циклически повторяем до тех пор, пока длина интервала `[a,b]` не станет равной либо меньшей заданной точности, т.е.

$$|b-a| \le \varepsilon.$$

Схема алгоритма уточнения корней по *методу половинного деления* представлена на рис. 4.5.

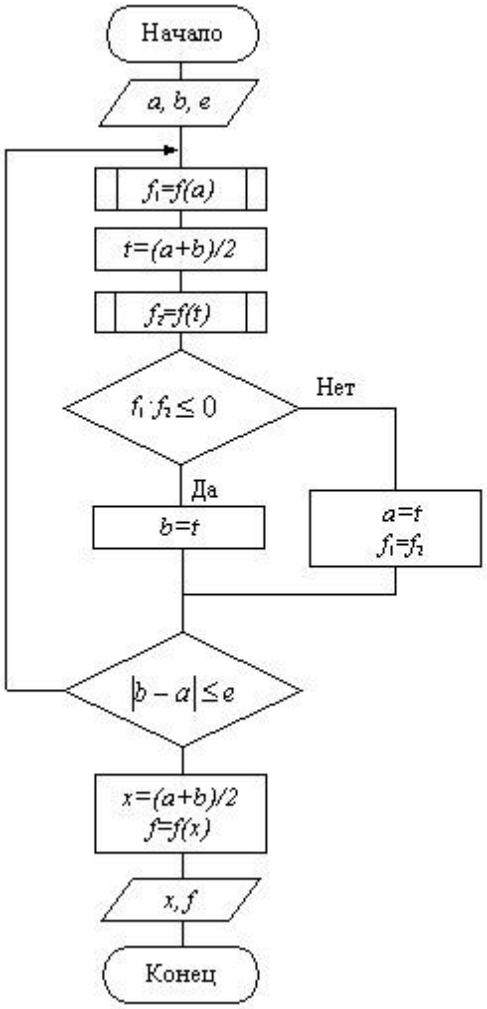


Рис. 4.5. Схема алгоритма уточнения корней по методу половинного деления

Метод простых итераций

В ряде случаев весьма удобным приемом уточнения корня уравнения является метод последовательных приближений (метод итераций).

Пусть с точностью ε необходимо найти корень уравнения `f(x)=0`, принадлежащий интервалу изоляции `[a,b]`. Функция `f(x)` и ее первая производная непрерывны на этом отрезке.

Для применения этого метода исходное уравнение `f(x)=0` должно быть приведено к виду

$$x = \varphi(x) \quad (4.2)$$

В качестве начального приближения 0 выбираем любую точку интервала `[a,b]`.

Далее итерационный процесс поиска корня строится по схеме:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ &\dots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

В результате итерационный процесс поиска реализуется рекуррентной формулой (4.3). Процесс поиска прекращается, как только выполняется условие

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad (4.4)$$

или число итераций превысит заданное число `N`.

Для того, чтобы последовательность x_1, x_2,…, x_n приближалась к искомому корню, необходимо, чтобы выполнялось условие сходимости:

$$|\varphi'(x)| < 1. \quad (4.5)$$

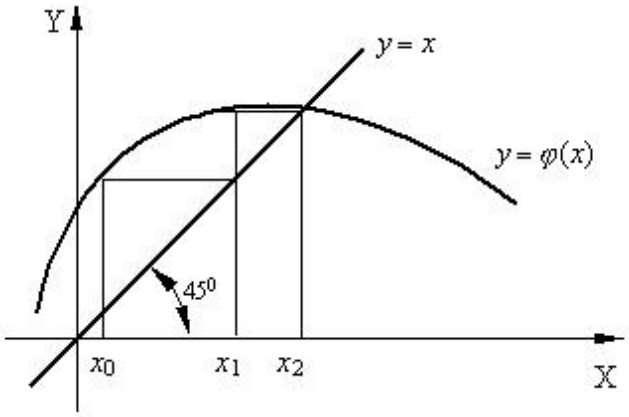


Рис. 4.6. Геометрический смысл метода

Переходим к построению схемы алгоритма (рис. 4.7). Вычисление функции $\varphi(x)$ оформим в виде подпрограммы.

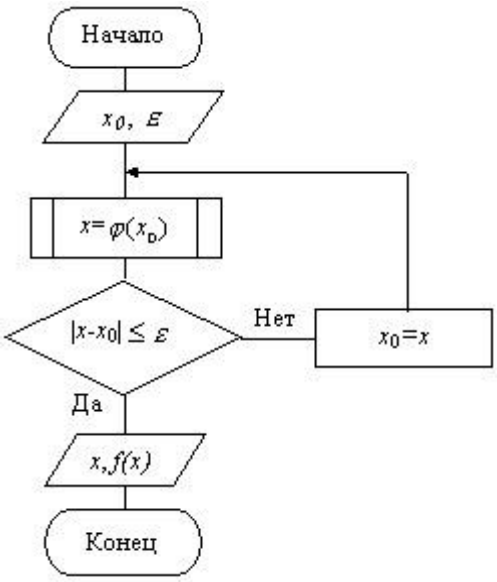


Рис. 4.7. Схема алгоритма уточнения корня методом итераций

Метод Ньютона (метод касательных)

Рассмотренные ранее методы решения нелинейных уравнений являются методами прямого поиска. В них для нахождения корня используется нахождение значения функции в различных точках интервала `[a,b]`.

Метод Ньютона относится к градиентным методам, в которых для нахождения корня используется значение производной.

Дано нелинейное уравнение:

`f(x)=0`

Найти корень на интервале [a,b] с точностью ε .

Метод Ньютона основан на замене исходной функции `f(x)`, на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью `X` дает приближение корня (Рис. 4.8).

Выберем начальную точку $x_0=b$ (конец интервала изоляции). Находим значение функции в этой точке и проводим к ней касательную, пересечение которой с осью `X` дает нам первое приближение корня x_1.

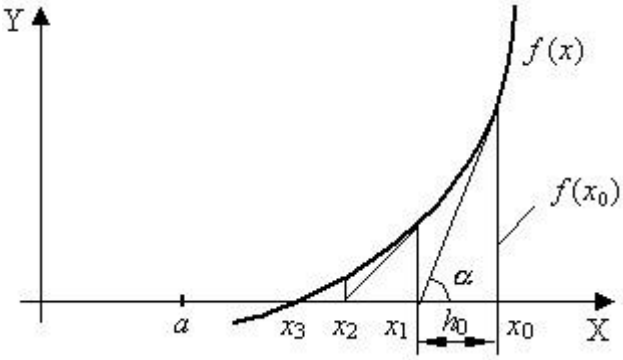


Рис. 4.8.

$x_1 = x_0 - h_0$,

где

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Поэтому

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.6)$$

Процесс поиска продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \quad (4.7)$$

Упростим условие (4.7), исходя из (4.6). Получим:

$$\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \leq \varepsilon. \quad (4.8)$$

Метод обеспечивает быструю сходимость, если выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \quad (4.9)$$

т.е. первую касательную рекомендуется проводить в той точке интервала $[a,b]$, где знаки функции $f(x_0)$ и ее кривизны $f''(x_0)$ совпадают.

Схема алгоритма уточнения корня *метод Ньютона* приведена на рис. 4.9

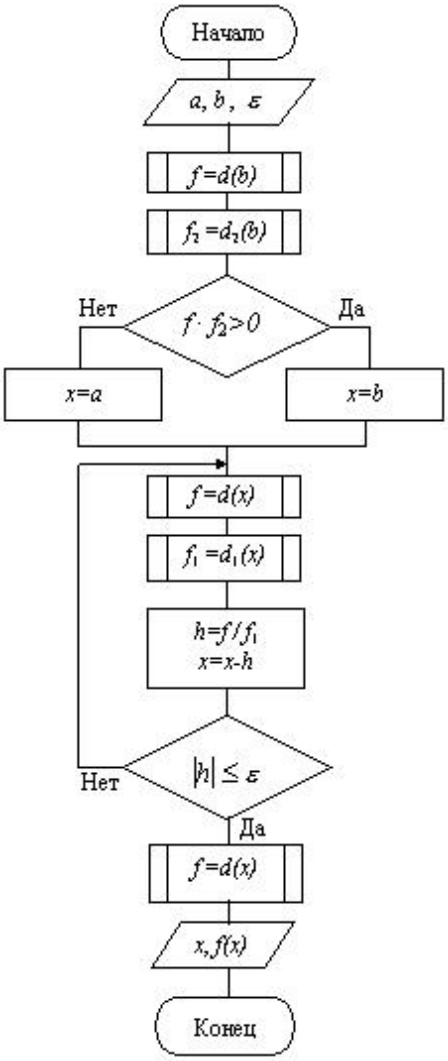


Рис. 4.9. Схема алгоритма уточнения корня методом Ньютона

Модифицированный метод Ньютона (метод секущих)

В этом методе для вычисления производных на каждом шаге поиска используется численное дифференцирование по формуле:

$$f'(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Тогда рекуррентная формула (4.6) будет иметь вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)\Delta x}{\Delta f(x_n)} = \\ = x_n - \frac{f(x_n)\Delta x}{f(x_n+\Delta x)-f(x_n)}, \qquad (4.10)$$

где $\Delta x \approx \varepsilon$

Метод хорд

Метод основан на замене функции `f(x)` на каждом шаге поиска хордой, пересечение которой с осью `x` дает приближение корня.

При этом в процессе поиска семейство хорд может строиться:

а) при фиксированном левом конце хорд, т.е. z=a, тогда начальная точка x_0=b (рис. 4.10а);

б) при фиксированном правом конце хорд, т.е. z=b, тогда начальная точка x_0=a (рис. 4.10б);

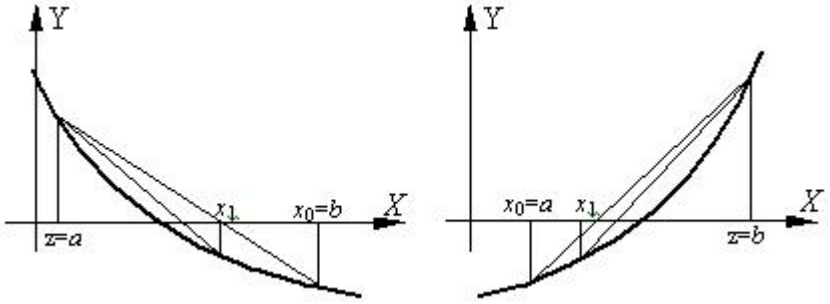


Рис. 4.10.

В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой:

для случая а)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a); \quad (4.11)$$

для случая б)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}(x_n - b); \quad (4.12)$$

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \text{ или } |h| \leq \varepsilon. \quad (4.13)$$

Метод обеспечивает быструю сходимость, если f(z)f"(z) > 0, т.е. хорды фиксируются в том конце интервала [a,b], где знаки функции f(z) и ее кривизны f"(z) совпадают.

Схема алгоритма уточнения корня *методом хорд* представлена на рис. 4.11.

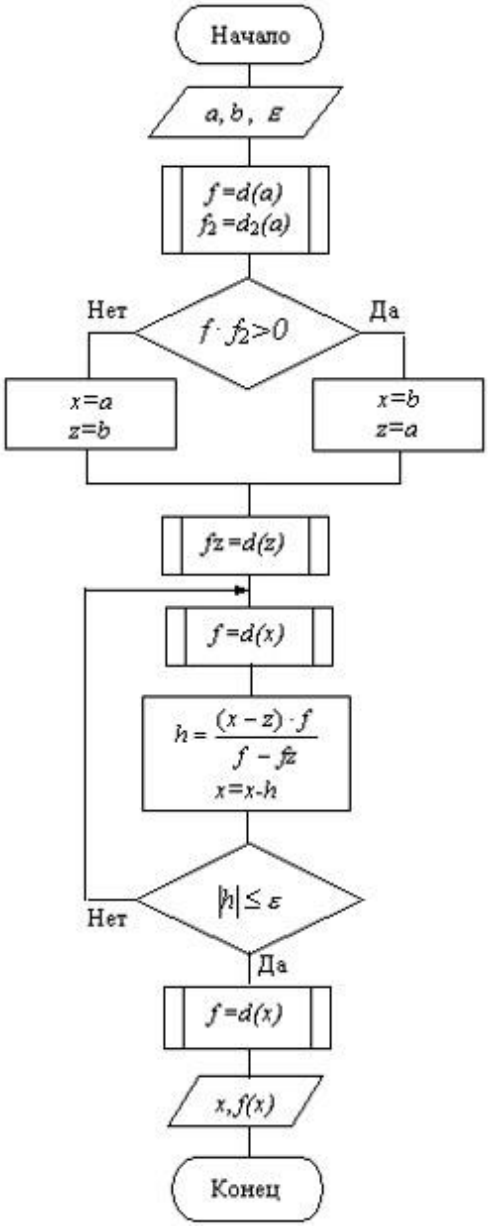


Рис. 4.11. Схема алгоритма уточнения корня методом хорд

5. Лекция: Компьютерное имитационное моделирование. Статистическое имитационное моделирование

Компьютерное моделирование как новый метод научных исследований основывается на:

1. построении математических моделей для описания изучаемых процессов;
2. использовании новейших вычислительных машин, обладающих высоким быстродействием (миллионы операций в секунду) и способных вести диалог с человеком.

Суть компьютерного моделирования состоит в следующем: на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится серия вычислительных экспериментов, т.е. исследуются свойства объектов или процессов, находятся их оптимальные параметры и режимы работы, уточняется модель. Например, располагая уравнением, описывающим протекание того или иного процесса, можно изменяя его коэффициенты, начальные и граничные условия, исследовать, как при этом будет вести себя объект. *Имитационные модели* - это проводимые на ЭВМ вычислительные эксперименты с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

Реальные процессы и системы можно исследовать с помощью двух типов математических моделей: аналитических и имитационных.

В аналитических моделях поведение реальных процессов и систем (РПС) задается в виде явных функциональных зависимостей (уравнений линейных или нелинейных, дифференциальных или интегральных, систем этих уравнений). Однако получить эти зависимости удается только для сравнительно простых РПС. Когда явления сложны и многообразны исследователю приходится идти на упрощенные представления сложных РПС. В результате аналитическая модель становится слишком грубым приближением к действительности. Если все же для сложных РПС удается получить аналитические модели, то зачастую они превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден часто использовать*имитационное моделирование*.

Имитационное моделирование представляет собой численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течении заданного периода. При этом функционирование РПС разбивается на элементарные явления, подсистемы и модули. Функционирование этих элементарных явлений, подсистем и модулей описывается набором алгоритмов, которые имитируют элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационное моделирование - это совокупность методов алгоритмизации функционирования объектов исследований, программной реализации алгоритмических описаний, организации, планирования и выполнения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими функционирование РПС в течении заданного периода.

Под алгоритмизацией функционирования РПС понимается пооперационное описание работы всех ее функциональных подсистем отдельных модулей с уровнем детализации, соответствующем комплексу требований к модели.

"Имитационное моделирование" (ИМ)- это двойной термин. "Имитация" и "моделирование" - это синонимы. Фактически все области науки и техники являются моделями реальных процессов. Чтобы отличить математические модели друг от друга, исследователи стали давать им дополнительные названия. Термин *"имитационное моделирование"* означает, что мы имеем дело с такими математическими моделями, с помощью которых нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, а

для предсказания поведения системы необходим вычислительный эксперимент (имитация) на математической модели при заданных исходных данных.

Основное достоинство ИМ:

1. возможность описания поведения компонент (элементов) процессов или систем на высоком уровне детализации;
2. отсутствие ограничений между параметрами ИМ и состоянием внешней среды РПС;
3. возможность исследования динамики взаимодействия компонент во времени и пространстве параметров системы;

Эти достоинства обеспечивают имитационному методу широкое распространение.

Рекомендуется использовать *имитационное моделирование* в следующих случаях:

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования. *Имитационная модель* служит средством изучения явления.
2. Если аналитические методы имеются, но математические процессы сложны и трудоемки, и *имитационное моделирование* дает более простой способ решения задачи.
3. Когда кроме оценки влияния параметров (переменных) процесса или системы желательно осуществить наблюдение за поведением компонент (элементов) процесса или системы (ПС) в течение определенного периода.
4. Когда *имитационное моделирование* оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальных условиях (реакции термоядерного синтеза, исследования космического пространства).
5. Когда необходимо контролировать протекание процессов или поведение систем путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.
6. При подготовке специалистов для новой техники, когда на *имитационных моделях* обеспечивается возможность приобретения навыков в эксплуатации новой техники.
7. Когда изучаются новые ситуации в РПС. В этом случае имитация служит для проверки новых стратегий и правил проведения натурных экспериментов.
8. Когда особое значение имеет последовательность событий в проектируемых ПС и модель используется для предсказания узких мест в функционировании РПС.

Однако ИМ наряду с достоинствами имеет и недостатки:

1. Разработка хорошей ИМ часто обходится дороже создания аналитической модели и требует больших временных затрат.
2. Может оказаться, что ИМ неточна (что бывает часто), и мы не в состоянии измерить степень этой неточности.
3. Зачастую исследователи обращаются к ИМ, не представляя тех трудностей , с которыми они встретятся и совершают при этом ряд ошибок методологического характера.

И тем не менее ИМ является одним из наиболее широко используемых методов при решении задач синтеза и анализа сложных процессов и систем.

Одним из видов *имитационного моделирования* является статистическое *имитационное моделирование*, позволяющее воспроизводить на ЭВМ функционирование сложных случайных процессов.

При исследовании сложных систем, подверженных случайным возмущениям используются вероятностные аналитические модели и вероятностные *имитационные модели*.

В вероятностных аналитических моделях влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). При этом построение вероятностных аналитических моделей представляет собой сложную вычислительную задачу. Поэтому вероятностное аналитическое моделирование используют для изучения сравнительно простых систем.

Подмечено, что введение случайных возмущений в *имитационные модели* не вносит принципиальных усложнений, поэтому исследование сложных случайных процессов проводится в настоящее время, как правило, на *имитационных моделях*.

В вероятностном *имитационном моделировании* оперируют не с характеристиками случайных процессов, а с конкретными случайными числовыми значениями параметров ПС. При этом результаты, полученные при воспроизведении на *имитационной модели* рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями. Поэтому для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Именно поэтому исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью *имитационного моделирования* принято называть статистическим моделированием.

Статистическая модель случайного процесса - это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер.

При реализации на ЭВМ статистического *имитационного моделирования* возникает задача получения на ЭВМ случайных числовых последовательностей с заданными вероятностными характеристиками. Численный метод, решающий задачу генерирования последовательности случайных чисел с заданными законами распределения, получил название "метод статистических испытаний" или "метод Монте-Карло".

Так как метод Монте-Карло кроме статистического моделирования имеет приложение к ряду численных методов (взятие интегралов, решение уравнений), то целесообразно иметь различные термины.

Итак, статистическое моделирование - это способ изучения сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью *имитационных моделей*.

Метод Монте-Карло - это численный метод, моделирующий на ЭВМ псевдослучайные числовые последовательности с заданными вероятностными характеристиками.

Методика статистического моделирования состоит из следующих этапов:

1. Моделирование на ЭВМ псевдослучайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих на ЭВМ случайные значения параметров при каждом испытании;
2. Преобразование полученных числовых последовательностей на *имитационных математических моделях*.
3. Статистическая обработка результатов моделирования.

Обобщенный алгоритм метода статистических испытаний представлен на рис. 5.1.

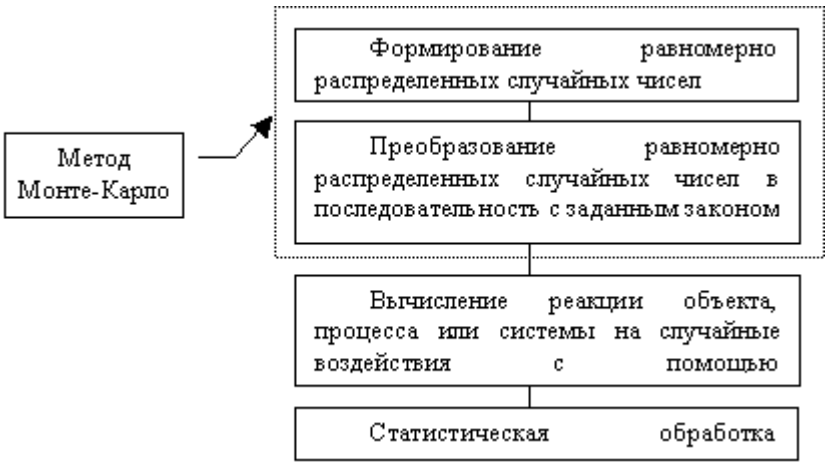


Рис. 5.1. Обобщенный алгоритм метода статистических испытаний

6. Лекция: Случайные события, случайные величины. Их законы распределения и числовые характеристики: версия для печати и PDA

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Обозначим: X, Y, Z – случайные величины

x_i, y_i, z_i – возможные значения случайных величин.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные возможные значения $x_i, i = \overline{1,n}$ или $i = \overline{1,\infty}$ с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины, независимо от величины промежутка, бесконечно

$$x_i, i = \overline{1,\infty}$$

Для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все ее возможные значения, нужно указать еще и их вероятность.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между ее возможными значениями и вероятностями их появления. Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически (в виде многоугольника распределения).

Табличное задание закона распределения:

$X\, x_1 x_2 \ldots x_n \rightarrow$ возможные значения случайной величины;

$P\, p_1 p_2 \ldots p_n \rightarrow$ вероятности появления случайной величины.

Аналитическое задание закона распределения:

Биномиальное распределение, определяемое законом Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$ – количество возможных появлений событий

$q = 1-p$ – вероятность не появления событий.

Распределение Пуассона, определяемое асимптотической формулой Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

где:

λ - интенсивность потока событий.

Графическое задание закона распределения представлено на рис.6.1.

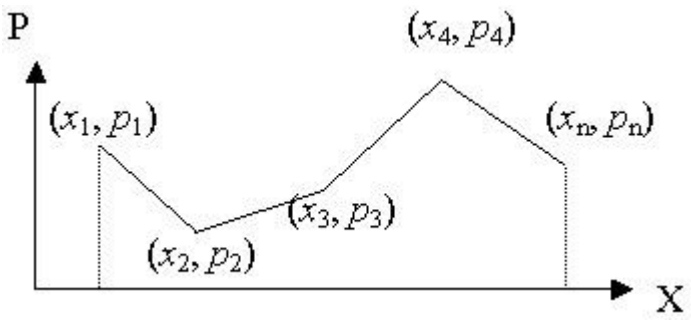


Рис. 6.1.

Способ описания распределения случайной величины в виде таблицы, в виде формулы или графически применим только для дискретных случайных величин.

Интегральная функция распределения позволяет задать как дискретную, так и непрерывную случайную величину.

Интегральная функция распределения (ИФР)– это функция `F(x)`, определяющая для каждого возможного значения `x` вероятность того, что случайная величина `X` примет значение меньшее `x`, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрический смысл интегральной функции распределения – это вероятность того, что случайная величина `X` примет значение, которое на числовой оси лежит левее точки `x`.

Свойства интегральной функции распределения:

1. Значения интегральной функции распределения принадлежат отрезку `[0;1]`: $0 \le F(x) \le 1.$.
2. Вероятность того, что случайная величина `X` примет значение, заключенной в интервале `(a,b)`, равна приращению интегральной функции распределения на этом интервале

   $$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

3. Если все возможные значения `x` случайной величины принадлежат интервалу `(a, b)`, то

   $F(x) = 0$, если $x \le a$,

   $F(x) = 1$, если $x \ge b$.

График ИФР непрерывной случайной величины представлен на рис. 6.2

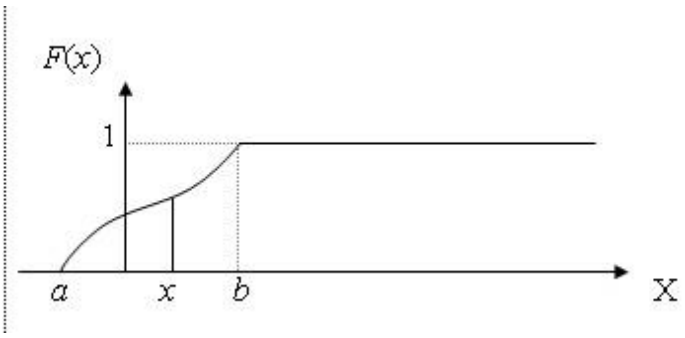


Рис. 6.2. График ИФР непрерывной случайной величины

График ИФР дискретной случайной величины представлен на рис. 6.3

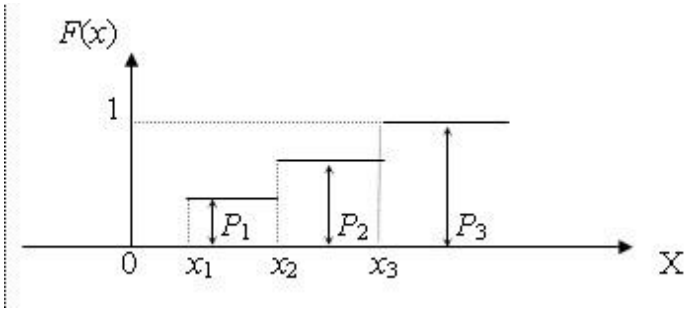


Рис. 6.3. График ИФР дискретной случайной величины

Для описания распределения вероятностей непрерывной случайной величины используется дифференциальная функция распределения.

Дифференциальная функция распределения (ДФР) (или плотность вероятности) – это первая производная от интегральной функции.

$$f(x) = F'(x)$$

Интегральная функция распределения является первообразной для дифференциальной функции распределения. Тогда

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(x)dx = P(-\infty < X < x).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина `X` примет значение, принадлежащее интервалу `(a,b)`, равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в пределах от `a` до `b`:

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Геометрический смысл ДФР состоит в следующем: вероятность того, что непрерывная случайная величина `X` примет значение, принадлежащее интервалу `(a, b)`, равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью `x`, кривой распределения `f(x)` и прямыми `x = a и x = b` (рис. 6.4).

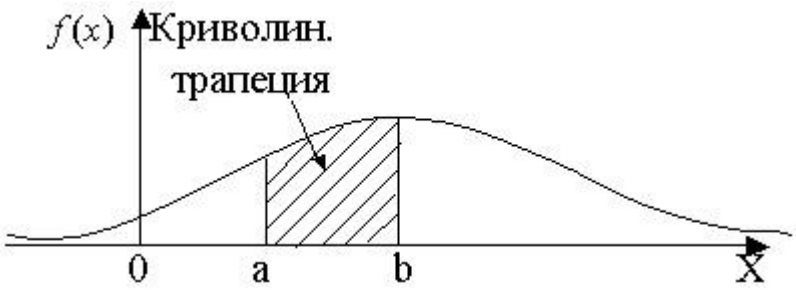


Рис. 6.4.

График дифференциальной функции распределения принято называть кривой распределения.

Свойства дифференциальной функции распределения:

1. Дифференциальная функция распределения неотрицательна, т. е. $f(x) \geq 0$
2. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу `(a, b)`, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Так как дифференциальная функция распределения равна `f(x)=F'(x)`, то можно записать

$$f(x) = lim\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}, \Delta x \to 0, \quad (6.1)$$

т. е. предел отношения вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x+\Delta x)$ к длине этого интервала Δx (при $\Delta x \to 0$), равен значению дифференциальной функции распределения в точке `x`.

Аналогичное (6.1) определение дается в механике для определения плотности массы в точке (если масса распределена вдоль оси X по закону `F(x)`), поэтому в теории вероятности для дифференциальной функции распределения `f(x)` часто используется термин "плотность вероятности в точке".

На основании (6.1) запишем:

$$F(x+\Delta x) - F(x) \cong f(x) \cdot \Delta x \quad (6.2)$$

Вероятностный смысл дифференциальной функции распределения на основании (6.2) таков: вероятность того, что случайная величина примет значение принадлежащее интервалу $(x, x+\Delta x)$ приближенно равна произведению плотности вероятности в точке `x` на длину интервала Δx или (на графике) площади прямоугольника с основанием Δx и высотой `f(x)`.

Дифференциальную функцию распределения часто называют законом распределения вероятностей непрерывных случайных величин.

При решении прикладных задач сталкиваются с различными законами распределения вероятностей непрерывных случайных величин. Часто встречаются законы равномерного и нормального распределения.

Примечание. Отметим, что законом распределения вероятностей дискретных случайных величин, называют соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и вероятностями их появления. Вероятности можно задать таблично, аналитически (биномиальное распределение по формуле Бернулли, распределение Пуассона) или графически (в виде многоугольника распределения).

Закон равномерного распределения вероятностей непрерывной случайной величины используется при имитационном моделировании сложных систем на ЭВМ как первоначальная основа для получения всех необходимых статистических моделей. При этом, если специально не оговорен закон распределения случайных чисел, то имеют ввиду равномерное распределение.

Распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале `(a,b)`, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция распределения имеет постоянное значение, т. е. `f(x) = C`.

Так как

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = 1,$$

то

$$C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}.$$

Отсюда закон равномерного распределения аналитически можно записать так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{1}{b-a}, a < x \le b, \\ 0, x > b, \end{cases}$$

График дифференциальной функции равномерного распределения вероятностей представлен на рис. 6.5

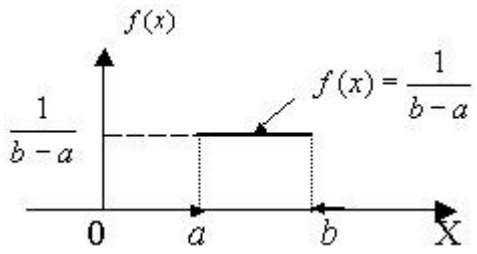


Рис. 6.5.

Интегральную функцию равномерного распределения аналитически можно записать так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \text{ т.к. здесь } f(x) = 0; \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{ Если } a < x \le b, \text{т.к.} F(x) = \int\limits_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}; \\ 1, \text{ если } x > b, \text{ т.к. } F(x) = \frac{b-a}{b-a} = 1. \end{cases}$$

График интегральной функции равномерного распределения вероятностей представлен на рис. 6.6

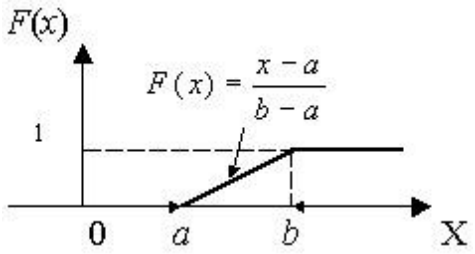


Рис. 6.6.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится пользоваться, так называемыми, числовыми характеристиками случайной величины. К ним относятся:

1. Математическое ожидание M,
2. Дисперсия D,
3. Среднее квадратичное отклонение σ .

Математическое ожидание дискретной случайной величины X – это сумма произведений всех ее возможных значений $x_i, i = \overline{1,n}$ на их вероятности $p_i, i = \overline{1,n}$.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n. \quad (6.3)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможное значение которой принадлежит отрезку [a,b] – это определенный интеграл

$$M(X) = \int\limits_a^b x f(x) dx \quad (6.4)$$

Последнее определение (для непрерывной случайной величины) получено на основании того, что вероятность попадания X в интервал Δx приблизительно равна $f(x) \cdot \Delta x.$.

Математическое ожидание случайной величины (как дискретной, так и непрерывной) есть неслучайная (постоянная) величина. Она характеризует среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C)=C$ – математическое ожидание константы равно самой константе
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$
3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$
4. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$

Вероятностный смысл математического ожидания:

Математическое ожидание приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины:

$$M(X) \approx \check{X} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n} = x_1 \cdot W_1 + x_2 \cdot W_2 + \ldots + x_k \cdot W_k,$$

где:

m_k– частота наблюдений, W_k– относительная частота.

Дисперсия и среднее квадратичное отклонение – это числовые характеристики случайной величины, которые позволяют оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Отклонением называют разность между значением случайной величины и ее математическим ожиданием, т. е.

$x_I - M(X)$.

Пусть закон распределения дискретной случайной величины известен:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда закон распределения отклонения этой случайной величины имеет вид:

$X-M(X)$	$x_1-M(X)$	$x_2-M(X)$	…	$x_n-M(X)$
P	p_1	p_2	…	p_n

Так как одни возможные отклонения положительны, а другие отрицательны, то математическое ожидание отклонения обладает важным свойством:

$M(X - M(X))=0$,

т.е. математическое ожидание отклонения всегда равно нулю.

Поэтому для оценки рассеяния случайной величины вокруг ее математического ожидания вычисляют квадрат отклонения случайной величины, т. е.

$(x_i - M(X))^2$.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины (как дискретной, так и непрерывной) называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Для дискретной случайной величины: $D(X) = M(X - M(X))^2$

Для непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

В последнем выражении все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку (a, b).

Дисперсия случайной величины (как дискретной, так и случайной) есть неслучайная (постоянная величина).

Пример:

Дискретная случайная величина имеет следующий закон распределения:

X	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Математическое ожидание этой случайной величины:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 = 2.3.$$

Квадраты отклонений возможных значений случайной величины:

$$(x_1 - M(X))^2 = (1–2.3)^2 = 1.69,$$
$$(x_2 - M(X))^2 = (2 - 2.3)^2 = 0.09,$$
$$(x_3 - M(X))^2 = (5 - 2.3)^2 = 7.29.$$

Закон распределения квадрата отклонения:

$(x-M(X))^2$	1.69	0.09	7.29
p	0.3	0.5	0.2

Тогда дисперсия приведенной случайной величины равна:

$$D(X) = 169 \cdot 03 + 009 \cdot 05 + 729 \cdot 02 = 201$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии, т. е.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

В приведенном примере среднее квадратичное отклонение случайной величины равно:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2.01} = 1.4177446.$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей формулой: $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$, т. е. дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

Рассмотрим еще раз предыдущий пример.

Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	1	2	5
P	0.3	0.5	0.2

Математическое ожидание этой случайной величины равно:

$$M(X) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 = 2.3$$

Закон распределения квадрата случайной величины, т. е. X^2:

X^2	1	4	25
P	0.3	0.5	0.2

Математическое ожидание X^2 равно:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.5 + 25 \cdot 0.2 = 7.3.$$

Тогда дисперсия приведенной случайной величины равна:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 7.3 - (2.3)^2 = 2.01.$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2.01} = 1.4177.$$

Рассмотрим пример, если задана непрерывная случайная величина.

Пусть непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения:

$$F_x = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 0, \\ x, \text{ если } 0 < x \leq 1, \\ 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Найдем дифференциальную функцию распределения:

$$f_x = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leq 0, \\ 1, \text{ если } 0 < x \leq 1, \\ 0, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Математическое ожидание X и X^2:

$$M(X) = \int_0^1 x f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$M(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Тогда:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12};$$
$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0.288675.$$

Если равномерно распределенная случайная величина задана в интервале `[a,b]`, то ее математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение равны:

$$M(X) = \frac{1}{2} \cdot (a+b),$$
$$D(X) = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2,$$
$$\sigma(X) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot (b-a).$$

Свойства дисперсии:

1. `D(C)=0`
2. `D(CX)=C`^{2}`D(X)`
3. `D(X+Y)=D(X)+D(Y)`,
4. `D(C+X)=D(X)`,
5. `D(X-Y)=D(X)+D(Y)`.

Свойство среднеквадратичного отклонения:

$$\sigma(X+Y+Z) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + \sigma^2(Z)}.$$

Закон нормального распределения вероятностей непрерывной случайной величины занимает особое место среди различных теоретических законов, т. к. является основным во многих практических исследованиях, им описывается большинство случайных явлений, связанных с производственными процессами.

К случайным явлениям, подчиняющимся нормальному закону распределения, относятся ошибки измерений производственных параметров, распределение технологических погрешностей изготовления, рост и вес большинства биологических объектов, распределение параметров пленочных резисторов и др.

Нормальным называют закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины, который описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.5)$$

где

а - математическое ожидание случайной величины;

σ -среднее квадратичное отклонение нормального распределения.

График дифференциальной функции нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса) (рис. 6.7).

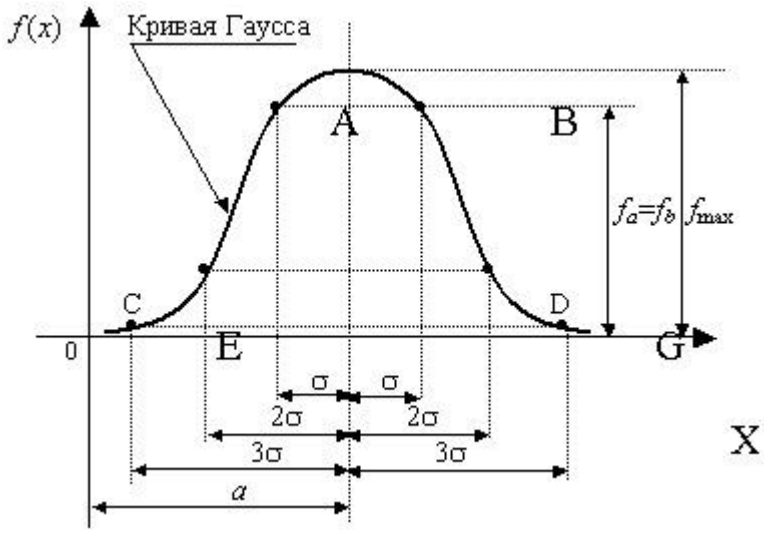


Рис. 6.7.

Свойства нормальной кривой (кривой Гаусса):

1. Кривая симметрична относительно прямой `x = a`.
2. Нормальная кривая расположена над осью `X`, т. е. при всех значениях `X` функция `f(x)` всегда положительна.
3. Ось `X` является горизонтальной асимптотой графика, т. к.

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$

4. При `x = a` функция `f(x)` имеет максимум равный

$$f_max = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0.4}{\sigma}.$$

5. В точках `A` и `B` при $x = a - \sigma$ и $x = a + \sigma$ кривая имеет точки перегиба, ординаты которых равны.

$$f_A = f_B = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx 0.6 \cdot f_{max} \approx \frac{0.24}{\sigma}.$$

При этом, вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины, распределенной нормально, от ее математического ожидания не превысит среднего квадратичного отклонения σ, равна 0,6826.

6. В точках E и G, при $x = a - 2\sigma$ и $x = a + 2\sigma$, значение функции `f(x)` равно

$$f_E = f_G = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2} \approx \frac{0.05}{\sigma},$$

а вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины, распределенной нормально, от ее математического ожидания не превысит удвоенного среднего квадратичного отклонения, равна 0,9544.

7. Асимптотически приближаясь к оси абсцисс, кривая Гаусса в точках C и D, при $x = a - 3\sigma$ и $x = a + 3\sigma$, очень близко подходит к оси абсцисс. В этих точках значение функции f(x) очень мало

$$f_C = f_D = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(\frac{9}{2})} \approx \frac{0.0044}{\sigma},$$

а вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины, распределенной нормально, от ее математического ожидания не превысит утроенного среднего квадратичного отклонения, равна 0,9973. Это свойство кривой Гаусса называется "правило трех сигм".

Изменение величины параметра a (математического ожидания случайной величины) не изменяет форму нормальной кривой, а приводит лишь к ее смещению вдоль оси X: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает.

При a=0 нормальная кривая симметрична относительно оси ординат.

Изменение величины параметра σ (среднего квадратичного отклонения) изменяет форму нормальной кривой: с возрастанием σ ординаты нормальной кривой убывают, кривая растягивается вдоль оси X и прижимается к ней. При убывании σ ординаты нормальной кривой увеличиваются, кривая сжимается вдоль оси X и становится более "островершинной".

При этом, при любых значениях α и σ площадь ограниченная нормальной кривой и осью X, остается равной единице (т. е. вероятность того, что случайная величина, распределенная нормально, примет значение ограниченное на оси X нормальной кривой, равна 1).

Нормальное распределение с произвольными параметрами α и σ, т. е. описываемое дифференциальной функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

называется общим нормальным распределением.

Нормальное распределение с параметрами $\alpha = 0$ и $\sigma = 1$, т. е. описываемое дифференциальной функцией

$$(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x)^2}{2}}, \quad (6.6)$$

называется нормированным распределением (рис. 6.8). В нормированном распределении дифференциальная функция распределения равна:

$$f_max \approx 0.4; f_A = f_B \approx 0.24; f_C = f_D \approx 0.0044; f_E = f_G \approx 0.05.$$

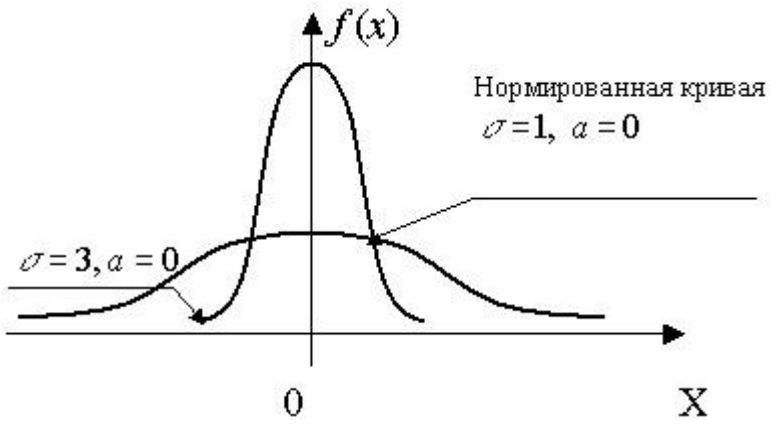


Рис. 6.8.

Интегральная функция общего нормального распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (6.7)$$

Интегральная функция нормированного распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^1}{2}} dz, \quad (6.8)$$

где

$$z = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону в интервале `(c, d)`. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу `(c, d)` равна

$$P(c < X < d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{c}^{d} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

Пронормируем это выражение. Для этого введем новую переменную `z`

Откуда: $x = \sigma \cdot z + a, dx = \sigma dz.$

Новые пределы интегрирования:

Для $x = c, z = \frac{c-a}{\sigma};$

для $x = d, z = \frac{d-a}{\sigma};$

Тогда, после нормирования, вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу `(c, d)` равна

$$P(c < X < d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c-a}{\sigma}}^{\frac{d-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma \cdot dz) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{d-a}{\sigma}} e^{\frac{z^2}{2}} dz - \int_0^{\frac{c-a}{\sigma}} e^{\frac{z^2}{2}} dz.$$

Пользуясь функцией Лапласа (функция табулирована)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

окончательно получим

$$P(c < X < d) = \Phi(\frac{d-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{c-a}{\sigma}).$$

Пример.

Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины равны a=30 и $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что X примет значение в интервале (10, 50).

Решение:

По условию: $c = 10; d = 50; a = 30; \sigma = 10$.

Тогда

$$P(10 < X < 50) = \Phi(\frac{50-30}{10}) - \Phi(\frac{10-30}{10}) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2).$$

Пользуясь готовыми таблицами Лапласа, имеем:

Отсюда $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544.$

7. Лекция: Метод Монте-Карло

При реализации на ЭВМ статистического моделирования возникает задача получения (генерирования) на ЭВМ случайных числовых последовательностей с заданными вероятностными характеристиками, в которых каждое число – это имитация случайного значения какого-либо параметра реального процесса или системы, подверженного случайным возмущениям.

Генерирование на ЭВМ таких случайных числовых последовательностей получило название *"метод Монте-Карло".*

В математической литературе часто используется термины "последовательность случайных чисел" или просто "случайные числа".

Однако, если проанализировать эти термины с философской точки зрения, то можно спросить: а есть ли такой объект как случайное число? Число 2 – это случайное число? Или число 17 – это случайное число? Конечно, нет. Если использовать точные термины, то можно говорить только о случайной последовательности чисел или о случайном значении параметров. Однако, в литературе широко используется термины "случайные числа" и "последовательность случайных чисел", и это означает, что каждое число было получено самым произвольным образом, без всякой связи с другими членами последовательности, и что у него есть определенная вероятность оказаться в заданном интервале.

Раньше ученые, нуждавшиеся для своей работы в случайных числах, раскладывали карты, бросали кости или вытаскивали шары из урны, которую предварительно как следует трясли. В 1927 году Л. Типпетт опубликовал таблицы, содержащие свыше 40 000 случайных чисел, взятых произвольно из отчетов по переписи. Позже были сконструированы специальные машины, механически вырабатывающие случайные числа. В 1955 году компания RAND Corporation опубликовала хорошо известные таблицы с миллионом случайных чисел, полученных одной из таких машин.

После создания ЭВМ начались поиски эффективных алгоритмов получения (генерирования на ЭВМ) последовательностей случайных чисел, пригодных для программной реализации.

Последовательности случайных чисел, вырабатываемые детерминистскими способами (т. е. с помощью специальных алгоритмов) называются псевдослучайными или квазислучайными. В дальнейшем мы будем их называть просто случайными последовательностями, понимая, что они просто производят впечатление случайных.

Задачу *генерирования случайных чисел* на ЭВМ с заданным законом распределения решают в несколько этапов:

Вначале получают последовательность равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$ псевдослучайных чисел.

Из равномерно распределенной последовательности получают последовательность псевдослучайных чисел с заданным законом распределения в заданном интервале.

Равномерным называется такое распределение, при котором каждое возможное случайное число равновероятно. Обычно, если специально не оговорен закон распределения случайных чисел, то имеют в виду равномерное распределение.

Сущность алгоритмических методов получения равномерно распределенных псевдослучайных чисел заключается в том, что псевдослучайные числа получают с помощью некоторой рекуррентной формулы $x_{i+1} = f(x_i)$,

где каждое следующее $(i+1)$-е значение образуется из предыдущего (или группы предыдущих) путем применения некоторого алгоритма, содержащего логические и арифметические операции.

Известно большое количество имитации равномерного распределения (методы вычетов, суммирования, усечения, перемешивания). Общими для всех этих методов являются требования:

1. Количество операций для получения каждого псевдослучайного числа должно быть минимальным;
2. Случайные числа генерируются как можно менее коррелированными, а их распределение – близким к равномерному

Метод середины квадрата

Первым алгоритмический метод получения равномерно распределенных псевдослучайных чисел предложил Джон фон Нейман (один из основоположников кибернетики). *Метод получил название "метод середины квадрата"* .

Суть метода: предыдущее случайное число возводится в квадрат, а затем из результата извлекаются средние цифры.

Например:

$$\text{пусть } x_0 = 0.2061, \text{ тогда } x_0^2 = 0.04|2477|21;$$
$$x_1 = 0.2477, x_1^2 = 0.06|1355|29;$$
$$x_2 = 0.1355, x_2^2 = 0.01|8360|25$$

и т.д.

Как видно *метод середины квадрата* довольно хорошо должен "перемешивать" предыдущее число. Однако он имеет недостатки:

1. Если какой-нибудь член последовательности окажется равным нулю, то все последующие члены также будут нулями.
2. Последовательности имеют тенденцию "зацикливаться", т. е. в конце концов, образуют цикл, который повторяется бесконечное число раз.

Свойство "зацикливаться" присуще всем последовательностям, построенных по рекуррентной формуле $x_{i+1}=f(x_i)$.

Повторяющийся цикл называется периодом. Длина периода у различных последовательностей разная. Чем больше, тем лучше.

Линейный конгруэнтный метод

Наилучшие из известных сегодня методов имитации случайных чисел представляют собой частные случаи схемы, предложенные в 1948 году Д.Х.Лемером.

Суть метода: Выбираем четыре "магических числа":

x_0 – начальное значение, $x_0 \geq 0$;

a – множитель, $a \geq 0$;

c – приращение, $c \geq 0$;

m – модуль, $m > x_0, m > a, m > c.$

Тогда искомая последовательность случайных чисел получается из соотношения:

$$x_{i+1} = (ax_i + c)Mod(m), n \geq 0, \quad (7.1)$$

т. е. каждое случайное число – это остаток, при делении (ax_i+c) на m (операция Mod - "определение остатка", термин взят от слова "modulo" – в переводе "остаток").

Последовательность, полученная из соотношения (7.1) называется линейной конгруэнтной последовательностью.

Пример: $x_0 = a = c = 7$, $m = 10$.

Тогда последовательность имеет вид: 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0,…

Как видно, при выбранных значениях "магических чисел" последовательность почти сразу "зациклилась", длина периода $= 4$.

Из этого примера видно, что "магические числа" нельзя выбирать произвольно. Проведено много исследований и доказано теорем по вопросу "как правильно выбирать" "магические числа".

Метод получения случайных чисел при $c=0$ называется "мультипликативный конгруэнтный метод", при $c \neq 0$ - "смешанный конгруэнтный метод". При $c=0$, выработка последовательностей происходит быстрее, но при этом уменьшается длина периода последовательностей.

Первоначально в методе Лемера было принято $c=0$. Идея получения более длинных последовательностей за счет $c \neq 0$ принадлежит Томпсону и независимо Ротенбергу.

Выбор модуля m. Для получения длинных последовательностей и для увеличения скорости вычисления рекомендуется m выбирать равным размеру машинного слова. Для 32^x разрядного машинного слова $m = 2^{31}=2147483648$, (левый нулевой бит слова отведен под знак числа).

При этом в 32^x разрядном машинном слове, максимальное целое число, размещающее в машинном слове, равно $\omega = 2^{31} - 1 = 2147483647\ldots$

Тогда $m = \omega + 1$

Значение множителя также влияет на длину периода последовательностей. По этому вопросу также проведено много исследований.

Линейные конгруэнтные последовательности – не единственный из предложенных источников случайных чисел. Его можно обобщить, превратив его, например, в квадратичный конгруэнтный метод

$$x_{i+1} = (dx_1^2 + a \cdot X_n + c)Mod(m).$$

Известен квадратичный метод, предложенный Р. Ковэю:

$$x_{i+1} = x_i(x_i + 1)Mod(2^c).$$

Известен метод получения случайных чисел, где реализуется последовательность Фибоначчи:

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-1})Mod(m).$$

Известен также метод получения случайных чисел, предложенный Грином:

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-k})Mod(m),$$

где k- большое число.

Имеются еще, так называемые, аддитивные методы, где не требуются операции умножения и деления, и другие методы.

8. Лекция: Генерирование на ЭВМ последовательностей равномерно распределенных случайных чисел. Моделирование нормально распределенной случайной величины

В стандартном математическом и программном обеспечении различных типов ЭВМ имеются специальные процедуры и подпрограммы для *генерации равномерно распределенных последовательностей псевдослучайных чисел*.

В настоящее время все языки высокого уровня имеют программные генераторы равномерно распределенных последовательностей псевдослучайных чисел. Их называют датчиками случайных чисел. Датчики случайных чисел, как правило имеют имена: `RAN, RAND, RANDU, RND, RANDOM, RANDOMIZE` и т.д. Эти имена получены от английского слова random, означающего случайный или выбранный наугад. Поэтому датчики случайных чисел иногда называют рандомизаторами.

Датчики случайных чисел обычно генерируют последовательность действительных чисел `Un`, равномерно распределенных между нулем и единицей, т.е. последовательность случайных дробей в интервале `[0,1]`. Но вначале датчики генерируют последовательность целых случайных чисел x_i в интервале от нуля до m, где m – размер машинного слова (на единицу больше максимального целого числа, размещающегося в машинном слове).

Как уже говорилось, для 32-х разрядного машинного слова:

$m = 2^{31} = 2147483648;$

$1/m = 0.4656613\ E-9.$

Приведем датчик равномерно распределенных случайных чисел RANDU.

Этот датчик специально предназначен для системы IBM и образует 2^{29} значений перед началом повторений, т.е. длина цикла равна 2^{29} (при 32-х разрядном машинном слове). Алгоритм датчика реализует метод остатка степеней (рис. 8.1).

Назначение датчика `RANDU`:

Вычисление равномерно распределенных случайных действительных чисел `YF` в интервале `[0,1]` и случайных целых чисел `IY` в интервале $[0,2^{31}]$. В качестве входа служит целое случайное число `IX`, на выходе образуется новое целое число `IY` и вещественное `YF`.

Обращение к датчику:

```
RANDU (IX,IY,YF).
```

Описание параметров:

`IX` – при первом обращении – нечетное целое число с числом цифр ≤ 9.

После первого обращения `IX=IY`, где `IY` – целое число, вычисленное при предыдущем обращении.

`IY` – полученное в результате целое случайное число, требуемое при последующих обращениях. `IY` находится в интервале $[0,\ 2^{31}]$.

YF– полученное в результате равномерно распределенное действительное число в интервале [0,1], представленное в форме с плавающей запятой.

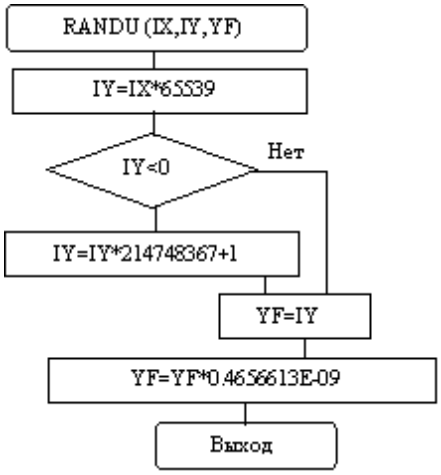


Рис. 8.1. Алгоритм датчика RANDU

Используя датчик RANDU, построим алгоритм вычисления последовательности равномерно распределенных случайных чисел и ее печать (рис. 8.2).

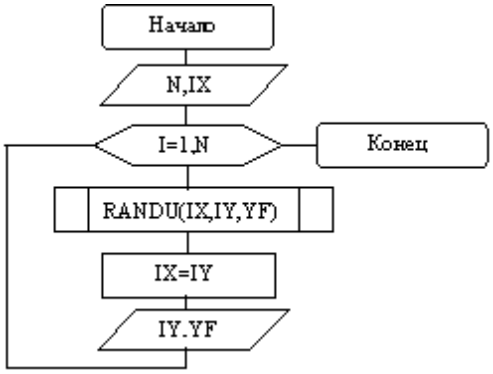


Рис. 8.2.

Алгоритм вычисления последовательности равномерно распределенных случайных чисел.

Исходные данные:

N - длина последовательности (количество испытаний).

IX - начальное значение, нечетное целое число с числом цифр <9.

Например: IX = 1234567.

Различные начальные значения параметра IX позволяют формировать различные последовательности равномерно распределенных псевдослучайных чисел.

Для генерирования равномерно распределенных случайных чисел на отрезке [0,1] используется отделение дробной части от сложного арифметического выражения, содержащего предшествующее число.

V_{i+1} =FRAC(k V_i)

FRAC – оператор выделения дробной части,

V_i - предшествующее случайное число,

V_{i+1} - последующее случайное число,

$k-8t = 3$,

t - нечетное целое число.

Задание различных начальных значений V_0 позволяет формировать различные последовательности случайных чисел.

Количество случайных чисел в одном периоде от нескольких тысяч до сотен тысяч.

Для перевода равномерно распределенных случайных чисел из отрезка $[0,1]$ в отрезок $[a,b]$ можно использовать:

$x_{i+1}= a + (b-a)V_{i+1}$.

Задачу моделирования случайных величин с нормальным законом распределения решают в несколько этапов:

1. Вначале имитируют равномерное распределение и получают последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на интервале $[0,1]$.
2. Затем, используя равномерно распределенную псевдослучайную величину, получают последовательность псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения (чаще всего в нормированном виде, т.е. $M(X) = 0$. $\sigma = 1$).

Пусть Y – равномерно распределенная случайная величина на интервале, $[0,1]$. Необходимо получить случайную величину X с нормальным законом распределения.

Различают три основных способа формирования последовательности нормально распределенных случайных величин:

1. Прямое преобразование псевдослучайного числа y являющегося реализацией случайной величины Y, равномерно распределенной на интервале $[0,1]$, с помощью некоторой функции W в число x, которое может рассматриваться как реализация случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения.
2. Отсеивание псевдослучайных чисел из первоначальной последовательности Y равномерно распределенной на интервале $[0,1]$, таким образом, чтобы оставшиеся числа были распределены по нормальному закону.
3. Моделирование условий, соответствующих центральной предельной теореме теории вероятности.

Рассмотрим некоторые методы моделирования нормально распределенной случайной величины.

Метод полярных координат относится к первому способу получения последовательности псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения. Метод вычисляет две независимые нормально распределенные случайные величины x_1 и x_2 со средним значением, равным нулю, и среднеквадратичным отклонением, равным единице, по двум заданным независимым равномерно распределенным случайным числам y_1 и y_2.

Алгоритм метода:

1. Выработать два независимых случайных числа y_1 и y_2, равномерно распределенных в интервале $[0,1]$.
2. Установить:

$$V_1 = 2 * y_1 - 1;$$
$$V_2 = 2 * y_2 - 1.$$

Теперь величины V_1 и V_2 равномерно распределены в интервале $[-1;+1]$ и их удобно представить в форме с плавающей запятой.

1. Установить:

$$S = V_1^2 + V_2^2$$

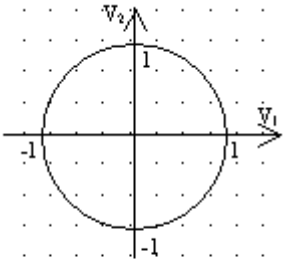
2. Проверить условие: $S \geq 1$ Если "да ", то необходимо вернуться к шагу 1. Если "нет", то переходим к шагу 3.
3. Вычисляем x_1 и x_2:

$$x_1 = V_1 \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot lnS}{S}}, \quad (8.1)$$

4. $$x_2 = V_2 \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot lnS}{S}}.$$
5. Полученные величины x_1 и x_2 – это требующиеся значения нормально распределенных случайных величин со средним значением равным нулю, и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 1$.
6. При других значениях среднего α и среднеквадратичного отклонения σ делаем пересчет:

$$x_i = a + x_i \cdot \sigma.$$

Метод полярных координат легко доказать, воспользовавшись аналитической геометрией. Рассмотрим плоскость, определенную декартовыми координатами V_1 и V_2. С помощью шагов 1 и 2 метода мы получаем на плоскости равномерно распределенные случайные точки с декартовыми координатами (V_1,V_2) и полярными координатами $V_1 = R \cdot \cos\theta, V_2 = R \cdot \sin\theta,$ где $R^2=S$. Далее, с помощью шагов 3 и 4 метода, мы из этих случайных точек оставляем только те точки, которые находятся внутри единичного круга.



При этом попадание точек внутрь единичного круга подчиняется закону нормального распределения со средним значением равным нулю, и среднеквадратичным отклонением равным единице.

Переходя к полярным координатам точек, которые равномерно распределены внутри единичного круга имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-2 \cdot \ln y_1} \cdot \cos(2\pi \cdot y_1), \\ x_2 &= \sqrt{-2 \cdot \ln y_2} \cdot \cos(2\pi \cdot y_2). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Метод, основанный на центральной предельной теореме

Этот метод моделирования относится к третьему способу получения последовательности чисел с нормальным законом распределения. Метод основан на приближенном воспроизводстве условий, при которых справедлива центральная предельная теорема теории вероятности.

Согласно центральной предельной теореме, при сложении достаточно большого независимых случайных величин с произвольным законом распределения получается случайная величина, распределенная по нормальному закону. Опыт показывает, что при сложении всего шести `(k=6)` случайных величин равномерно распределенных на интервале `[0,1]`, получается случайная величина, которая с точностью, достаточной для большинства прикладных задач, может считаться нормальной.

Рассмотрим метод аппроксимации нормально распределенной случайной величины `X`, основанный на использовании двенадцати `(k=12)` равномерно распределенных случайных величин.

Алгоритм метода:

1. Сложить 12 равномерно распределенных псевдослучайных чисел y_i.
2. Пронормировать полученную сумму, т.е. получить случайную величину `T` с `M(T)=0` и $\sigma = 1$, где `T` – нормально распределенная случайная величина.
3. Результат привести в соответствие с заданным математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением σ.

Нормально распределенная случайная величина `X` с требуемыми значениями математического ожидания и среднеквадратичного отклонения σ определяется как:

$$x = \sigma \cdot T + a.$$

Пусть

$$Z = \sum_{i=n}^{12} y_i,$$

где y_i – независимые равномерно распределенные на интервале `[0,1]` случайные величины.

Ранее было показано, что математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной на интервале `[0,1]` случайной величины `Y` соответственно равны:

$$M(Y) = \frac{1}{2}; D(Y) = \sigma_y^2 = \frac{1}{12}.$$

Тогда математическое ожидание суммы Z равно:

$$M(Z) = \sum_{i=1}^{12} M(Y) = 12\frac{1}{2} = 6.$$

а ее дисперсия D(Z) равна:

$$D(Z) = \sigma_s^2 = \sum_{i=1}^{12} D(Y) = 12\frac{1}{2} = 1.$$

Пронормируем сумму Z, т.е. перейдем от нее к величине:

$$T = (Z - M(Z))/\sigma_s = (Z - 6)/1 = Z - 6.$$

Переходя к требуемым математическому ожиданию a и среднеквадратичному отклонению σ , окончательно имеем:

$$x = \sigma \cdot T + a = \sigma(Z - 6) + a.$$

Таким образом, чтобы определить значение нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием, равным нулю, и среднеквадратичным отклонением, равным единице, необходимо взять 12 равномерно распределенных чисел, сложить их, а из суммы вычесть 6, т.е.:

$$T = \sum_{i=1}^{12} y_i - 6. \quad (8.4)$$

Чтобы определить значение нормально распределенной случайной величины с требуемым математическим ожиданием a и требуемым среднеквадратичным отклонением σ необходимо из суммы двенадцати равномерно распределенных чисел вычесть 6, а результат умножить на σ и прибавить a, т.е.

$$x = (\sum_{i=1}^{12} y_i - 6)\sigma + a. \quad (8.5)$$

Теперь перейдем к генерированию последовательности нормально распределенных случайных чисел.

Рассмотрим датчик нормально распределенных случайных чисел.

Алгоритм датчика (рис. 8.3) реализует *метод получения последовательностей псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения, основанный на центральной предельной теореме* вероятностей. Алгоритм датчика требует обращения к RANDU для вычисления равномерно распределенных случайных чисел.

Назначение датчика GAUSS:

Вычисление нормально распределенного псевдослучайного числа X с заданным математическим ожиданием AM и среднеквадратичным отклонением S.

Обращение к датчику: GAUSS (IX,S,AM,X),

Описание параметров:

IX – параметр необходимый для обращения к RANDU. При первом обращении, IX – целое число с числом цифр ≤ 9. После первого обращения IX=IY, где IY – целое равномерно распределенное случайное число, вычисленное с помощью равномерно распределенных случайных чисел RANDU.

S – требуемое среднеквадратичное отклонение нормального распределения.

AM – требуемое математическое ожидание нормального распределения.

X – значение вычисленной нормально распределенной случайной величины.

Требуемые подпрограммы:

RANDU – датчик равномерно распределенных случайных чисел.

Обращение к RANDU:

RANDU (IX,IY,YF),

где

YF – полученное в результате обращения случайное равномерно распределенное число в интервале [0,1] и представленное в форме с плавающей запятой.

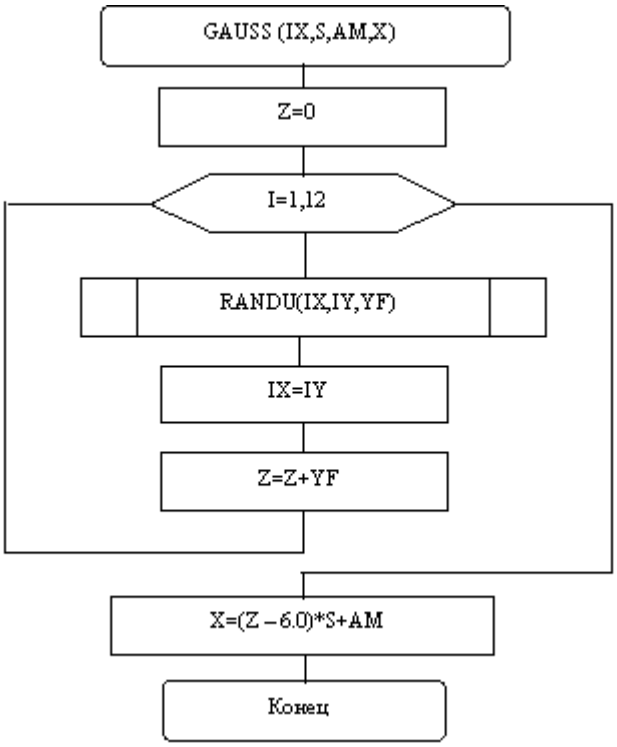


Рис. 8.3. Алгоритм датчика GAUSS

Используя датчик GAUSS, построим алгоритм (рис. 8.4) вычисления последовательности нормально распределенных случайных чисел X с требуемым математическим ожиданием AM и среднеквадратичным отклонением S.

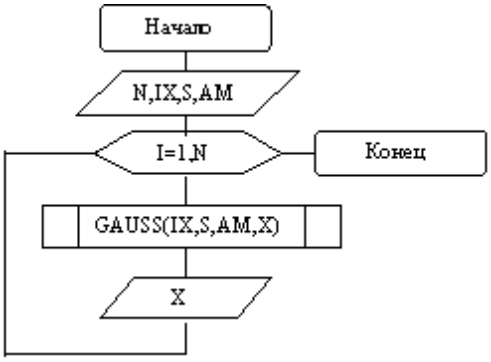


Рис. 8.4. Алгоритм вычисления последовательности нормально распределенных случайных чисел

Исходные данные:

N - длина последовательности нормально распределенных чисел (количество испытаний).

IX - начальное значение, нечетное целое число с числом цифр ≤ 9.

Например .

S, AM – характеристики нормального распределения: среднеквадратичное отклонение и математическое ожидание.

Результат:

X – значение нормального распределения псевдослучайного числа.

Используя различные начальные значения параметра IX, можно формировать различные последовательности нормального распределенных псевдослучайных чисел.